§3. Krive linije na površi

Neka je površ data jednačinom $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$. *Tada je prva osnovna forma* F_1 *površi odredjena sa*

$$F_1 = ds^2 = (d\vec{r}\cdot d\vec{r}) = (d\vec{r})^2 ,$$

gde je $$d\vec{r} = \vec{r}_u' du + \vec{r}_v' dv .$$

Može se pisati da je

$$F_1 = E\,du^2 + 2F du dv + G dv^2 ,$$

$$E = (\vec{r}_u')^2 , \quad F = (\vec{r}_u' \cdot \vec{r}_v'), \quad G = (\vec{r}_v' \cdot \vec{r}_v').$$

Jedinični vektor normale površi je odredjen sa

$$\vec{n}_o = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'}{\sqrt{EG-F^2}} .$$

Druga osnovna forma površi je

$$F_2 = (d^2\vec{r}\cdot\vec{n}_o) = -(d\vec{r}\cdot d\vec{n}_o) = L\,du^2 + 2M du dv + N dv^2 ,$$

gde je

$$d^2\vec{r} = \vec{r}''_{uu} du^2 + 2\vec{r}'_{uv} du\,dv + \vec{r}''_{vv} dv^2 .$$

Neka je K *krivina površi u tački* (u,v) *u pravcu* (du,dv), *a* $R=\frac{1}{K}$ *poluprečnik krive* c *dobivene normalnim presekom površi u tom* *pravcu. Tada je*

$$K = \frac{1}{R} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{L\,du^2 + 2\,M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} .$$

Podelivši i brojitelj i imenitelj gornjeg razlomka sa dv^2 *dobijamo* K *kao funkciju od* u,v *i* $\frac{du}{dv}$:

$$K = f(u,v, \frac{du}{dv}) .$$

Pravci za koje K *ima maksimalnu i minimalnu vrednost u fiksiranoj tački* (u,v) *zovu se glavni pravci u toj tački. Mogu se dobiti kao rešenja jednačine*

$$K_x' = 0 \qquad \text{gde je} \qquad x = \frac{du}{dv} .$$

Glavnim pravcima odgovaraju glavne krivine, i one mogu biti odredjene i kao koreni jednačine

$$\text{(a)} \quad (EG-F^2)K^2 - (EN-2FM+GL)K + (LN-M^2) = 0 .$$

Ako su K_1 *i* K_2 *glavne krivine, tada su* $R_1 = \frac{1}{K_1}$ i $R_2 = \frac{1}{K_2}$ *glavni poluprečnici.* $\frac{1}{2}(K_1 + K_2)$ *zove se srednja krivina, a* $K_1 K_2$ *se zove Gaussova krivina površi. Iz jednačine (a) imamo*

$$K_1 K_2 = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} , \quad K_1 + K_2 = \frac{EN-2FM+GL}{EG-F^2} .$$

Gaussova krivina površi se može izračunati i preko formule

$$K = \frac{R_{1212}}{g}$$

Kriva na površi čija tangenta u svakoj tački ima pravac jednog od glavnih pravaca u toj tački, zove se linija krivine krive te površi.

Ako su x_1 *i* x_2 *rešenja jednačine* $K_x' = 0$, *to je*

$$x_1 = \left(\frac{du}{dv}\right)_1 = f_1(u,v)$$

$$x_2 = \left(\frac{du}{dv}\right)_2 = f_2(u,v) .$$

Integralne krive gornjih diferencijalnih jednačina su linije krive. Ako je u nekoj tački $K_x' \equiv 0$, *tada je svaki pravac glavni* *pravac, tj. normalna krivina je ista za svaki pravac u toj tački, i ta tačka se zove pupčasta tačka površi.*

Kako je

$$K = \frac{Lx^2 + 2Mx + N}{Ex^2 + 2Fx + G}, \quad x = \frac{du}{dv},$$

to je $K'_x = 0$ *za ono* x *koje je rešenje jednačine*

$$(FL-ME)x^2 + (GL-NE)x + (GM-FN) = 0,$$

tj.

$$\begin{vmatrix} -1 & x & -x^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

Posle množenja prve vrste sa dv^2 *dobijamo*

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

što predstavlja diferencijalnu jednačinu linije krivine.

Koristeći Rodrigovu formulu koja kaže da je za glavne pravce, tj. za pravce u kojima je glavna krivina ekstramalna, imamo još i sledeće diferencijalne jednačine linije krive:

$$d\vec{n}_o = \lambda\, d\vec{r}$$

što povlači da je

$$d\vec{r} \cdot [\vec{n} \times d\vec{n}] = 0$$

Kako u prvoj aproksimaciji $\frac{1}{2} F_2$ *predstavlja rastojanje* d *tačke* $\vec{r}(u+du, v+dv)$ *od tangentne ravni površi povučene u tački* $\vec{r}(u,v)$, *to će biti istog znaka za svako* x, *tj. za svaki pravac* $\frac{du}{dv}$ *ako je diskriminanta kvadratnog trinoma*

(b) $\quad Lx^2 + 2Mx + N$

negativna, tj. ako je $M^2 - LN < 0$ *i takva tačka površi se zove eliptična tačka. U okolini te tačke površ je sa iste strane tangentne ravni.*

Ako je diskriminanta od (b) pozitivna, tj. $M^2 - LN > 0$ *, tada će postojati pravci* $\frac{du}{dv}$ *za koje je* $F_2 > 0$ *i takvi za koje je* $F_2 < 0$*, tj. površ će u toj tački biti sa razne strane tangentne ravni. Takva tačka se zove hiperbolična tačka površi. Pravci za koje je* $F_2 = 0$ *tj.* $Lx^2 + 2Mx + N = 0$ *zovu se asimptotski pravci u odredjenoj tački i u tim pravcima tangentna ravan dodiruje površ. Kriva na površi čija je tangenta u svakoj tački kolinearna sa asimptotskim pravcem u toj tački zove se asimptotska linija površi. Normalna krivina asimptotskih linija je nula. Dobijaju se kao integralne krive diferencijalne jednačine* $F_2 = 0$*. Iz svake hiperbolične tačke površi izlaze dve asimptotske linije.*

Ako je $M^2 - LN = 0$*, tada jednačina* $Lx^2 + 2Mx + N$ *ima jednu dvostruku nulu i postoji samo jedan pravac duž koje tangentna ravan dodiruje površ. Takva tačka površi zove se parabolična tačka površi.*

Ako glavna normala krive c_1 *zaklapa sa normalom površi ugao* θ *, tada je (*c_1 *leži na površi)*

$$R_1 = \pm R \cos \theta$$

gde je R_1 *poluprečnik krivine krive* c_1*, a* R *poluprečnik krivine krive* c*, koja se dobija normalnim presekom površi u tački krive* c_1 *i u pravcu iste. Oskulatorna ravan krive* c *sadrži tangentu krive* c_1 *i normalu površi. (*c *i* c_1 *imaju istu tangentu).*

Kriva na površi koja je normalna na nivoskoj liniji površi $z = 0$ *zove se linija najvećeg nagiba.*

Krive na površi kod kojih se glavna normala površi poklapa sa glavnom normalom krive u svakoj tački krive zovu se geodezijske linije površi.

Normala površi je tada normalna na binormalu krive, tj. važi

$$\vec{n} \cdot [d\vec{r} \times d^2\vec{r}] = 0$$

tj.

$$[\vec{r}_u' \times \vec{r}_v] \cdot [d\vec{r} \times d^2\vec{r}] = 0 .$$

§ 8. Prva diferencijalna forma plohe

8.1. Gaussove veličine prvoga reda

Neka je zadana ploha S svojom vektorskom jednadžbom:

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\,\vec{i} + y(u, v)\,\vec{j} + z(u, v)\,\vec{k}, \qquad (u, v) \in D. \tag{1}$$

Tada se za plohu S definiraju funkcije: $E, F, G : D \to \mathbf{R}$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned} E &= \vec{r}_u^{\,2} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ F &= \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \\ G &= \vec{r}_v^{\,2} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Veličine E, F i G definirane sa (2) zovemo *Gaussovim osnovnim (fundamentalnim) veličinama prvoga reda* ili koeficijentima prve diferencijalne forme.

8.2. Duljina luka krivulje na plohi. Prva diferencijalna forma plohe

Ako je zadana krivulja α na plohi S sa:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(\mathrm{u}(t), v(t)), \; t \in I$$

i ako su $\vec{r}(t_1)$ i $\vec{r}(t_2)$ radijvektori dviju njezinih točaka A i B onda je realan broj:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \quad dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt \tag{3}$$

duljina luka krivulje na plohi od točke A do točke B.

Promotrimo funkciju $s(t) : I \to \mathbf{R}$ za krivulju α na plohi S definiranu sa:

$$s(t) = \int_{a}^{t} \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \quad dt = \int_{a}^{t} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt. \tag{4}$$

Tada jednadžbu (4) možemo pisati u diferencijalnom obliku ovako:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \equiv I \tag{5}$$

koji se zove *prva diferencijalna ili fundamentalna forma plohe.* Još se zove i metrička ili kvadratna forma plohe i označuje sa I.

Formom I određeno je mjerenje duljina krivulja na plohi. Kažemo da je formom I dana *metrika* na plohi.

8.3. Kut između dviju krivulja na plohi definira se kao kut između njihovih tangenata u presječnoj točki M

Neka su zadane krivulja α i β sa:

$$\alpha \ldots \vec{r}_1(t) = \vec{r}(u(t), v(t)), \quad \text{tj. } u = u(t),\ v = v(t)$$

$$\beta \ldots \vec{r}_2(t) = \vec{r}(\bar{u}(t), \bar{v}(t)), \quad \text{tj. } u = \bar{u}(t),\ v = \bar{v}(t)$$

tada su njihovi tangentni vektori dani s:

$$\dot{\vec{r}}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt},$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \vec{r}_u \frac{d\bar{u}}{dt} + \vec{r}_v \frac{d\bar{v}}{dt}.$$

Kut ω između dviju krivulja na plohi u presječnoj točki M jednak je tada:

$$\cos\omega = \frac{d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2}{|d\vec{r}_1|\,|d\vec{r}_2|} = \frac{d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2}{\sqrt{d r_1^2}\sqrt{d r_2^2}}, \text{ tj.}$$

$$\cos\omega = \frac{E\,du\,d\bar{u} + F(du\,d\bar{v} + dv\,d\bar{u}) + G\,dv\,d\bar{v}}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\ \sqrt{E\,d\bar{u}^2 + 2F\,d\bar{u}\,d\bar{v} + G\,d\bar{v}^2}}, \tag{6}$$

gdje su:

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv,$$

$$d\vec{r}_1 = \vec{r}_u d\bar{u} + \vec{r}_v d\bar{v},$$

Napomena: Gaussove veličine E, F, G u (6) računamo u točki M.

Specijalni slučajevi:

a) Kut između krivulje na plohi i u-krivulje dan je izrazom (tada je β u-krivulja, tj. $\bar{v} = \text{const.}$, $d\bar{v} = 0$):

$$\cos\omega = \frac{E\,du + F\,dv}{\sqrt{E}\ \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}}.$$

b) Kut između krivulje na plohi i v-krivulje dan je izrazom (tada je β v-krivulja, tj. $\bar{u} = \text{const.}$, $d\bar{u} = 0$):

$$\cos\omega = \frac{E\,du + G\,dv}{\sqrt{G}\ \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}}.$$

c) Kut između koordinatnih u i v-krivulja dan je izrazom (tada je krivulja α u-krivulja, tj. $v = \text{const.}$, $dv = 0$, a krivulja β v-krivulja tj. $\bar{u} = \text{const.}$, $d\bar{u} = 0$):

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

d) Ako su krivulje α i β na plohi međusobno okomite, tada je:

$$E\,du\,d\bar{u} + F(du\,d\bar{v} + dv\,d\bar{u}) + G\,dv\,d\bar{v} = 0.$$

e) Uvjet okomitosti koordinatnih u i v krivulja prema c) glasi:

$$F = 0.$$

8.4. Ploština omeđenog dijela plohe

Neka je dana ploha S svojom jednadžbom $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ i na njoj zatvoreno područje (K). Tada je ploština područja (K) jednaka:

$$S = \iint_{(K)} dS = \iint_{D} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, du\, dv = \iint_{D} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv, \tag{7}$$

gdje je D zatvoreno područje u ravnini takvo da je $\vec{r}(D) = (K)$.
Ovdje, naime, vrijedi (vidi zad. 2):

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|^2 = \vec{r}_u^{\,2} \vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2 = EG - F^2. \tag{8}$$

Izraz:

$$EG - F^2 = W^2 \tag{9}$$

koji je uvijek pozitivan zove se *diskriminanta prve diferencijalne forme* ili Weingartenova funkcija.

Uvjet (6) iz § 6, tj. $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ sada postaje $EG - F^2 \neq 0$.

Jedinični vektor normale iz § 7.1. sada glasi:

$$\vec{N}^0 = \frac{\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}. \tag{10}$$

Zadaci:

§ 9. Druga diferencijalna forma

9.1. Druga diferencijalna ili kvadratna forma plohe

Neka je ploha S zadana svojom vektorskom jednadžbom:

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\,\vec{i} + y(u, v)\,\vec{j} + z(u, v)\,\vec{k}, \quad (u, v) \in D.$$

Tada se na plohi S definiraju funkcije $L, M, N : D \to \mathbf{R}$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned} L &= \vec{N}^0 \cdot \vec{r}_{uu} = \frac{1}{W}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \; \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \; \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2}\right), \\ M &= \vec{N}^0 \cdot \vec{r}_{uv} = \frac{1}{W}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \; \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \; \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v}\right), \\ N &= \vec{N}^0 \cdot \vec{r}_{vv} = \frac{1}{W}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \; \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \; \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2}\right), \end{aligned} \tag{1}$$

odnosno koordinatno:

$$L = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{vmatrix}$$

$$M = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \end{vmatrix} \tag{1*}$$

$$N = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{vmatrix}$$

Funkcija L, M i N zovemo *Gaussovim osnovnim (fundamentalnim) veličinama drugog reda* ($W = \sqrt{EG - F^2}$).

a) Neka je nadalje zadana krivulja α na plohi S svojim jednadžbama $u = u(s)$, $v = v(s)$, tj.

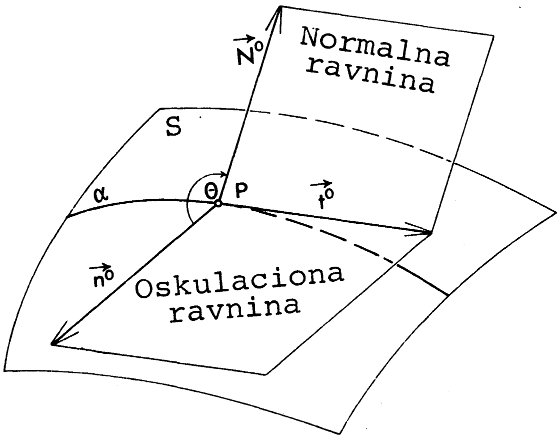
$$\vec{r} = \vec{r}[u(s), \quad v(s)], \tag{2}$$

gdje je s duljina luka krivulje α. Tada vrijedi:

$$\vec{N}^0 \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} = \varkappa \cos\theta, \tag{3}$$

gdje je $\varkappa$ zakrivljenost krivulje α u nekoj točki P, θ kut između orta $\vec{N}^0$ normale na plohu i orta $\vec{n}^0$ glavne normale na krivulju α u točki P (sl. 44).

Relacija (3) dade se napisati u obliku:



Sl. 44.

$$\varkappa \cos\theta = L\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) + N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \equiv \text{II}. \tag{4}$$

Desna strana izraza (4) zove se *druga diferencijalna ili druga kvadratna forma plohe* i označuje s II.

b) Ako je krivulja α na plohi umjesto parametrom s parametrizirana nekim parametrom λ, koji nije duljina luka,

$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}(u(\lambda), v(\lambda))$, onda relacija (4) prelazi u:

$$\varkappa \cos\theta = \frac{L\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2 + 2M\left(\frac{du}{d\lambda}\right)\left(\frac{dv}{d\lambda}\right) + N\left(\frac{dv}{d\lambda}\right)^2}{E\left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{d\lambda}\right)\left(\frac{dv}{d\lambda}\right) + G\left(\frac{dv}{d\lambda}\right)^2}, \tag{5}$$

odnosno:

$$\varkappa \cos\theta = \frac{L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2}{E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2} \equiv \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}. \tag{6}$$

Desna strana izraza (6) je kvocijent druge i prve diferencijalne forme plohe.

9.2. Normalni i kosi presjek plohe

Ravnina koja prolazi jednim pravcem tangentne ravnine, tj. smjerom $\vec{t}^0$ ili $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$ i normalom $\vec{N}^0$ na plohu u točki P plohe S siječe ovu plohu u ravninskoj krivulji γ koja se zove *normalni presjek plohe S u točki P u smjeru vektora* t^0.

Svaka druga ravnina koja prolazi istim pravcem (tj. smjerom $\vec{t}^0$) ali ne normalom $\vec{N}^0$ plohe S, siječe ovu plohu u krivulji koja se zove *kosi presjek*.

9.3. Normalna zakrivljenost plohe u danom smjeru

To je zakrivljenost K_n normalnog presjeka u tom smjeru. Normalnoj zakrivljenosti pridružujemo predznak na ovaj način: kut $\theta = 0$ ili π, jer su vektori $\vec{n}^0$ i $\vec{N}^0$ glavne normale normalnog presjeka i normale na plohu kolinearni (istog ili suprotnog smjera). Pri tome uzimamo da je $K_n > 0$ ako je normalni presjek u točki P plohe S zakrivljen prema vektoru $\vec{N}^0$ normale na plohu, a $K_n < 0$ ako je on zakrivljen od vektora $\vec{N}^0$. Pokazuje se da je normalna zakrivljenost u smjeru $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$ dana izrazom (prema (5) ili (6)):

$$K_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}. \tag{7}$$

9.4. Meusnierov teorem

Ovaj teorem povezuje zakrivljenost K_n normalnog i $\varkappa$ kosog presjeka i dan je relacijom:

$$K_n = \varkappa \cos\theta, \tag{8}$$

gdje je θ kut između orta $\vec{N}^0$ normale na plohu i orta $\vec{n}^0$ glavne normale na krivulju α u točki P plohe sa zajedničkom tangentom.

Odavde proizlazi da od svih krivulja na polohi koje prolaze jednom točkom i imaju zajedničku tangentu najmanju zakrivljenost u toj točki ima normalni presjek plohe.

Zakrivljenost plohe definira se pomoću zakrivljenosti krivulja na plohi.

$\frac{1}{K_n}$ i $\frac{1}{\varkappa}$ zovu se radiusi zakrivljenosti normalnog i kosog presjeka.

(#) Zadana je sfera svojom parametrizacijom

$$\vec{r} = (r\sin u\cos v,\ r\sin u\sin v,\ r\cos u),\quad u\in[0,\pi],\ v\in[-\pi,\pi].$$

Naći prvu diferencijalnu formu pridruženu toj parametrizaciji.

Rj. Pronađimo prvo Gausove fundamentalne veličine prvog reda, E, F i G. ($E=\dot{\vec{r}}_u^{\,2}$, $F=\dot{\vec{r}}_u\cdot\dot{\vec{r}}_v$, $G=\dot{\vec{r}}_v^{\,2}$).

$$\dot{\vec{r}}_u = (r\cos u\cos v,\ r\cos u\sin v,\ -r\sin u)$$

$$\dot{\vec{r}}_v = (-r\sin u\sin v,\ r\sin u\cos v,\ 0)$$

$$E=\dot{\vec{r}}_u^{\,2} = (r\cos u\cos v)^2 + (r\cos u\sin v)^2 + (-r\sin u)^2$$

$$= r^2\left(\underline{\cos^2 u}\cos^2 v + \underline{\cos^2 u}\sin^2 v + \sin^2 u\right) =$$

$$= r^2(\cos^2 u + \sin^2 u) = r^2$$

$$F=\dot{\vec{r}}_u\cdot\dot{\vec{r}}_v = -r^2\sin u\cos u\sin v\cos v + r^2\sin u\cos u\sin v\cos v + 0 = 0$$

$$G=\dot{\vec{r}}_v^{\,2} = \underline{r^2\sin^2 u}\sin^2 v + \underline{r^2\sin^2 u}\cos^2 v = r^2\sin^2 u$$

Prva fundamentalna forma plohe $I = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ sada glasi

$$I = r^2 du^2 + r^2\sin^2 u\, dv^2.$$

Ako promjenjive u i v zamjenimo sa ϕ i θ imamo

$$\vec{r} = (r\sin\phi\cos\theta,\ r\sin\phi\sin\theta,\ r\cos\phi)$$

$$I = r^2 d\phi^2 + r^2\sin^2\phi\, d\theta^2$$

(#) Naći prvu diferencijalnu formu ravnine u odnosu na parametrizaciju

$$x = x_0 + l_1 u + l_2 v$$
$$y = y_0 + m_1 u + m_2 v$$
$$z = z_0 + n_1 u + n_2 v.$$

R: Odredimo prvo Gaussove fundamentalne veličine prvog reda:

$$E = \dot{\vec{r}}_u^{\,2}, \quad \dot{\vec{r}}_u = (l_1, m_1, n_1)$$

$$E = l_1^2 + m_1^2 + n_1^2$$

$$F = \dot{\vec{r}}_u \cdot \dot{\vec{r}}_v, \quad \dot{\vec{r}}_v = (l_2, m_2, n_2), \quad F = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$

$$G = \dot{\vec{r}}_v^{\,2} = l_2^2 + m_2^2 + n_2^2$$

Prva fundamentalna forma je oblika

$$I = (l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)\, du^2 + (l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2)\, du\, dv + (l_2^2 + m_2^2 + n_2^2)\, dv^2$$

Ako su parametarske u i v crte zadane jediničnim vektorima, tada je

$$I = du^2 + 2\cos\omega\, du\, dv + dv^2$$

gdje je ω ugao između pravaca u i v.
Ako su još pravci u i v međusobno okomiti, tada je prva diferencijalna forma

$$I = du^2 + dv^2 \quad \text{ili} \quad I = dx^2 + dy^2$$

Ako je još xOy ravan parametarizirana polarnim koordinatama

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \\ z &= 0 \end{aligned} \quad \text{tada} \quad \begin{aligned} dx &= \cos\varphi\, d\rho - \rho\sin\varphi\, d\varphi \\ dy &= \sin\varphi\, d\rho + \rho\cos\varphi\, d\varphi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} dx^2 &= \cos^2\varphi\, d\rho^2 - 2\rho\sin\varphi\cos\varphi\, d\rho\, d\varphi + \rho^2\sin^2\varphi\, d\varphi^2 \\ dy^2 &= \sin^2\varphi\, d\rho^2 + 2\rho\sin\varphi\cos\varphi\, d\rho\, d\varphi + \rho^2\cos^2\varphi\, d\varphi^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow I = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$$

Prisjetimo se $\quad f = \eta(u, v)$

$$df = \frac{\partial \eta}{\partial u} du + \frac{\partial \eta}{\partial v} dv$$

$$d^2 f = d(df) = d\left(\frac{\partial \eta}{\partial u} du + \frac{\partial \eta}{\partial v} dv\right)$$

$$df^2 = df \cdot df$$

Naći prvu diferencijalnu formu rotacione plohe

$$x = f(u)\cos v, \quad y = f(u)\sin v, \quad z = g(u)$$

gdje je os rotacije os Oz.

Rj: Odredimo prvo Gausove fundamentalne veličine prvog reda

$$\vec{r}_u = (f'\cos v,\ f'\sin v,\ g')$$

$$\vec{r}_v = (-f(u)\sin v,\ f\cos v,\ 0)$$

$$E = \vec{r}_u^{\,2} = f'^2\cos^2 v + f'^2\sin^2 v + g'^2 = f'^2 + g'^2$$

$$F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = -ff'\sin v\cos v + ff'\sin v\cos v + 0 = 0$$

$$G = \vec{r}_v = f^2\sin^2 v + f^2\cos^2 v + 0 = f^2$$

Prva diferentijalna forma je

$$ds^2 = (f'^2 + g'^2)\,du^2 + f^2\,dv^2$$

Napomenimo da koordinatne krive u i v ove rotacione plohe čine ortogonalnu mrežu jer je $F=0$

(#) Naći prvu diferencijalnu formu plohe zadane eksplicitnom jednačinom $z=z(x,y)$.

Rj. Posmatrajmo proizvoljnu tačku $M(x_1,y_1,z_1)$ ove plohe. Za proizvoljne vrijednosti x_1 i y_1 dobijemo tačku $z_1=z(x_1,y_1)$. Prema tome, vektorska jednačina plohe bi glasila:

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z(x,y)\vec{k}.$$

Izračunajmo Gaussove fundamentalne veličine prvog reda

$$E=\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\right)^2=1^2+0^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$$

$$F=\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}=1\cdot 0+0\cdot 1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}=\left(0,1,\frac{\partial z}{\partial y}\right),\quad G=\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}\right)^2=0^2+1^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

Ako uvedemo oznake $p=\frac{\partial z}{\partial x}$ i $q=\frac{\partial z}{\partial y}$ imamo:

$$E=1+p^2,\quad F=pq,\quad G=1+q^2.$$

Prva diferencijalna forma plohe glasi

$$ds^2=E\,dx^2+2F\,dx\,dy+G\,dy^2$$

odnosno

$$ds^2=(1+p^2)\,dx^2+2pq\,dx\,dy+(1+q^2)\,dy^2.$$

(#) Zadana je ploha

$$\vec{r}(u,v) = u\vec{a} + \sin u\,\vec{b} + v\vec{c}, \quad u,v \in R$$

gdje su $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ zadani vektori.

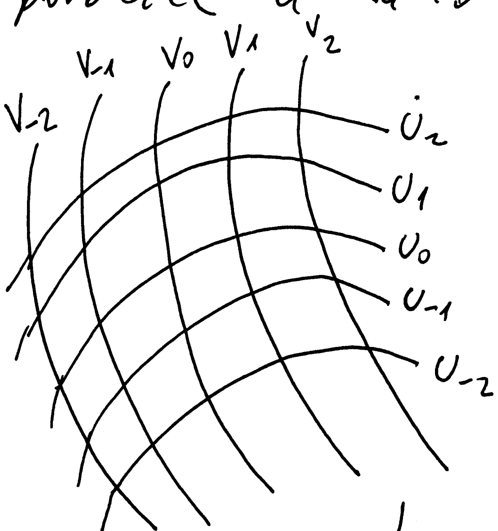
a) Ispitati što su koordinatne krivulje.

b) Odrediti koeficijente E, F i G prve kvadratne forme

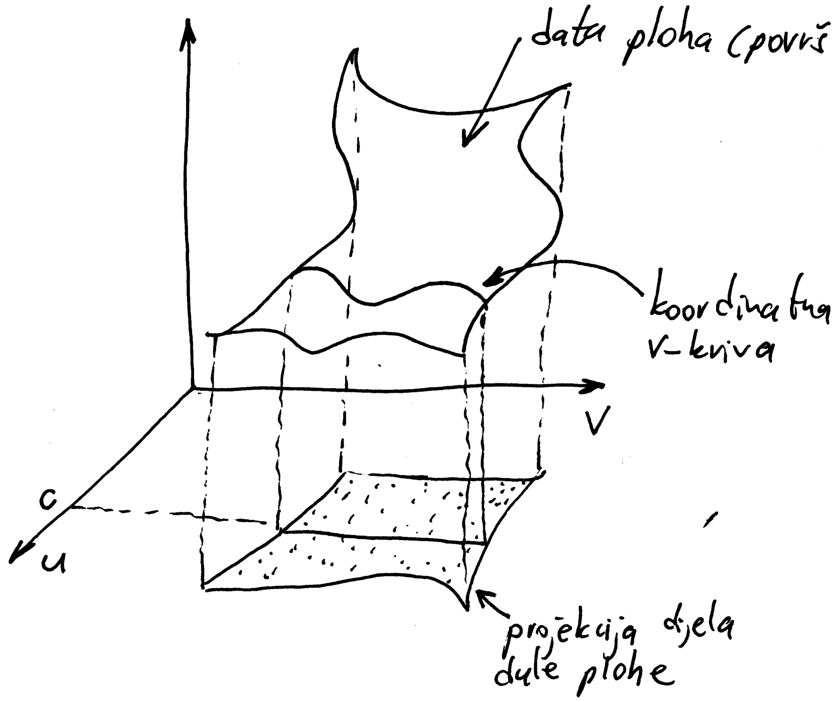
c) Kada će se koordinatne krive ove plohe sjeći ortogonalno?

d) Naći element površine dS dane plohe.

Rj. Znamo da su koordinate brojevi uzeti u određenom redu i koji određuju položaj tačke na liniji, u ravni, na površi ili u prostoru. Zavisno od cilja i karaktera ispitivanja ovog ili onog objekta biraju se različiti koordinatni sistemi, pomoću kojih se svakoj tački prostora koordinira određen skup brojeva – koordinatne tačke. Na primjer, u nekoj oblasti ravni ili u cijeloj ravni se razmatraju dvije porodice linija $U(M)=\text{const.}$ i $V(M)=\text{const.}$, takve da se linije iste porodice ne sijeku među sobom, a svaka linija jedne porodice se siječe sa svakom linijom druge porodice u samo jednoj tački M. Brojevi $U(M)$ i $V(M)$ su onda koordinate tačke M u ravni.



Ako su linije $U=\text{const.}$ i $V=\text{const.}$ prave, sistem koordinata se naziva pravolinijski koordinatni sistem. Ako je jedna od linija porodica $U=\text{const}$ ili $V=\text{const}$, ili ako su obe linije krive linije, koordinatni sistem se naziva krivolinijski ili Gaussov koordinatni sistem.



U našem slučaju postoje dvije koordinatne krive

a) v-kriva (v-krivulja)

b) u-kriva

Koordinatne v-krive dobijemo kada za u stavimo neku konstantu

$u = u_0 = \text{const.}$

$$\vec{r} = \underbrace{u_0 \vec{a} + \vec{b} \sin u_0}_{=\vec{r}_0} + v\vec{c}$$

koordinatna v-kriva

prava paralelna sa $\vec{c}$

Koordinatne u-krive dobijemo kada za v stavimo nek. konst.

$v = v_0 = \text{const}$

$$\vec{r} = u\vec{a} + \sin u\, \vec{b} + v_0 \vec{c}$$

koordinatne u-krive

kosa sinusoida u ravni ∥ ravni određ. sa vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$

b) Gausove fundamentalne veličine prvog reda

$$E = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)^2 = (\vec{a} + \vec{b}\cos u)^2$$

$$F = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{c}\cdot\vec{a} + \vec{c}\cdot\vec{b}\cos u$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{c}, \quad G = \vec{c}^{\,2}$$

c) $F = 0$ je uslov okomitosti koordinatnih u i v krivih tj.

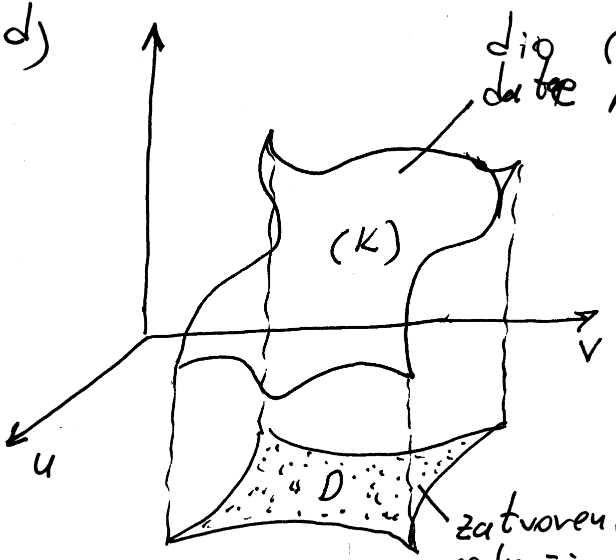
$\vec{c}\cdot\vec{a} + \vec{c}\cdot\vec{b}\cos u = 0$ i ovo treba da vrijedi za $\forall u$,

Odavde možemo vidjeti da će ova jednakost biti zadovoljena (i dosljedi dalje) za $\vec{c}\cdot\vec{a} = 0$ i $\vec{c}\cdot\vec{b} = 0$ tj. kada je

$\vec{c} \perp \vec{a}$ i $\vec{c} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{c} = k(\vec{a}\times\vec{b})$

Za $\vec{c} = k(\vec{a}\times\vec{b})$ koordinatne krive će se sječi ortogonalno.

d)



Površina područja (K) se računa po formuli

$$P=\iint\limits_{(K)} dS = \iint\limits_{D} |\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|\, du\, dv$$

$$= \iint\limits_{D} \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv$$

U ovom slučaju mi tražimo element površine dS.

$$dS = |\vec{r}_u \times \vec{r}\,'_v|\, du\, dv$$

$$\vec{r}\,'_u = \vec{a} + \vec{b}\cos u$$

$$\vec{r}\,'_v = \vec{c}$$

$$dS = |(\vec{a}+\vec{b}\cos u)\times \vec{c}\,|\, du\, dv = |(\vec{a}\times\vec{c}) + (\vec{b}\times\vec{c})\cos u|\, du\, dv$$

Ako su koordinatne krive međusobno ortogonalne, tada je $F=0$, pa je

$$dS = \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv = \sqrt{EG}\, du\, dv$$

$$= k\sqrt{(\vec{a}+\vec{b}\cos u)^2 (\vec{a}\times\vec{b})^2}\, du\, dv$$

Naći ugao pod kojim se sijeku krive

$x = x_0$, $y = y_0$ na plohi $z = axy$.

Rj. Ploha $z = axy$ ima vektorsku jednačinu

I način: $\vec{r} = (x, y, axy)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Ako uvrstimo za $x = x_0$ i $y = y_0$ u $\vec{r}$ dobićemo koordinatne krive, koje imaju jednačine

$$\vec{r}_1 = (x_0, y, ax_0 y)$$

$$\vec{r}_2 = (x, y_0, axy_0)$$

Tangentni vektori tih krivih su

$$\frac{d\vec{r}_1}{dy} = (0, 1, ax_0), \quad \frac{d\vec{r}}{dx} = (1, 0, ay_0)$$

pa je ugao između njih dan sa

$$\cos\omega = \frac{a^2 x_0 y_0}{\sqrt{1 + a^2 x_0^2}\,\sqrt{1 + a^2 y_0^2}}$$

II način:

Ugao ω možemo odrediti i na drugi način: on se, naime, podudara sa uglom između koordinatnih krivih, a taj je dat formulom

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

Kako je $E = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x}\right)^2 = 1 + a^2 y^2$, $F = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = a^2 x y$, $G = 1 + a^2 x^2$

Koordinatne krive se sijeku u tački (x_0, y_0) pa je

$$\cos\omega = \frac{a^2 x_0 y_0}{\sqrt{1 + a^2 y_0^2}\,\sqrt{1 + a^2 x_0^2}}$$

(#) Na plohi (sfera):

$$\vec{r} = (a\cos v \sin u,\ a\sin v \sin u,\ a\cos u),\ u \in [0, \pi],\ v \in [0, 2\pi],$$

zadane su dvije krive C_1 i C_2 sa $C_1: u = v$ i $C_2: \bar{u} + \bar{v} = \frac{\pi}{2}$.

a) Naći presječne tačke datih krivih

b) Odrediti ugao pod kojim se date krive sijeku.

R:

a) Dvije date krive imaju jednačine

$$C_1: \vec{r}_1 = (a\cos u \sin u,\ a\sin^2 u,\ a\cos u)$$

$$C_2: \vec{r}_2 = (a\underbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \bar{u}\right)}_{\cos\frac{\pi}{2}\cos\bar{u} + \sin\frac{\pi}{2}\sin\bar{u}}\sin\bar{u},\ a\underbrace{\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \bar{u}\right)}_{= \sin\frac{\pi}{2}\cos\bar{u} - \sin\bar{u}\cos\frac{\pi}{2}}\sin\bar{u},\ a\cos\bar{u})$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{umjesto } \bar{u} \\ \text{možemo} \\ \text{pisati } u \end{array} \right| = (a\sin^2 u,\ a\sin u\cos u,\ a\cos u)$$

Presječne tačke od C_1 i C_2 su za one vrijedn. u za koje vrijedi

$$\begin{aligned} a\cos u \sin u &= a\sin^2 u \\ a\sin^2 u &= a\sin u \cos u \\ a\cos u &= a\cos u \end{aligned}$$

$$a\cos u \sin u = a\sin^2 u$$

$$a\sin u(\cos u - \sin u) = 0$$

$$\sin u = 0, \quad \text{ili} \quad \cos u - \sin u = 0$$

$$u_1 = 0 \text{ ili } u_2 = \pi \quad \text{ili} \quad u = \frac{\pi}{4}$$

Presječne tačke dvije date krive su

$M_1\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ za $u = \frac{\pi}{4}$,

$M_2(0, 0, a)$ za $u = 0$ i

$M_3(0, 0, -a)$ za $u = \pi$.

b) ugao pod kojim se dvije date krive sijeku ćemo naći na dva načina

I način

Traženi ugao je jednak uglu između njihovih tangenata u presječnim tačkama krivih. Tangente na zadane krive imaju smjer

$$\frac{d\vec{r}_1}{du} = (a\cos^2 u - a\sin^2 u,\ a\sin u\cos u,\ -a\sin u)$$
$$= (a\cos 2u,\ a\sin 2u,\ -a\sin u)$$

$$\frac{d\vec{r}_2}{du} = (a\sin 2u,\ a\cos 2u,\ -a\sin u)$$

Znamo da je

$$\frac{d\vec{r}_1}{du}\cdot\frac{d\vec{r}_2}{du} = \left|\frac{d\vec{r}_1}{du}\right|\left|\frac{d\vec{r}_2}{du}\right|\cos\measuredangle\left(\frac{d\vec{r}_1}{du},\frac{d\vec{r}_2}{du}\right)$$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b})}$$

$$\cos\omega = \frac{\frac{d\vec{r}_1}{du}\cdot\frac{d\vec{r}_2}{du}}{\left|\frac{d\vec{r}_1}{du}\right|\cdot\left|\frac{d\vec{r}_2}{du}\right|} = \frac{a^2\sin 2u\cos 2u + a^2\sin 2u\cos 2u + a^2\sin^2 u}{\sqrt{a^2\cos^2 2u + a^2\sin^2 2u + a^2\sin^2 u}\sqrt{a^2\sin^2 2u + a^2\cos^2 2u + a^2\sin^2 u}}$$

$$\cos\omega = \frac{\sin 4u + \sin^2 u}{1+\sin^2 u}$$

Za $u=\frac{\pi}{4}$ traženi ugao je $\cos\omega = \dfrac{0+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}$ tj. $\omega = \arccos\frac{1}{3}$.

U tačkama M_2 i M_3 krive se sijeku pod pravim uglom. Napomenimo, da u sve tri tačke egzistiraju tangente na obe krive, jer su sve tri tačke regularne tačke krive.

Regularne tačke krive $\vec{r}=\vec{r}(t)$ su one tačke za koje je $\dot{\vec{r}}(t) \neq 0$.

II način

Ugao ω između dvije krive na plohi u presječnoj tački M (gdje je M regularna tačka parametrizacije tj. tačka u kojoj je $EG-F^2 \neq 0$) se računa po formuli

$$\cos\omega = \frac{E\,du\,d\bar{u} + F(du\,d\bar{v} + dv\,d\bar{u}) + G\,dv\,d\bar{v}}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\,\sqrt{E\,d\bar{u}^2 + 2F\,d\bar{u}\,d\bar{v} + G\,d\bar{v}^2}}$$

U jednom od prethodnih zadataka već smo računali Gaussove fundamentalne veličine prvog reda i dobili da je

$$E = a^2, \quad F = 0, \quad G = a^2 \sin^2 u$$

$$EG - F^2 = a^4 \sin^2 u$$

Za M_1 imamo da je $u = \frac{\pi}{4}$ tj. $EG-F^2 = \frac{a^2}{2} \neq 0$.
Za M_2 imamo da je $u = 0$ tj. $EG-F^2 = 0$
Za M_3 imamo da je $u = \pi$ tj. $EG-F^2 = 0$.

Odavde vidimo da je samo M_1 regularna tačka parametrizacije (razlikujmo pojmove regularna tačka parametrizacije i regularna tačka krive).

$$\cos\omega = \frac{E\,du\,d\bar{u} + G\,dv\,d\bar{v}}{\sqrt{E\,du^2 + G\,dv^2}\,\sqrt{E\,d\bar{u}^2 + G\,d\bar{v}^2}} = \left| \begin{array}{l} M_1: \\ \text{za } u = \frac{\pi}{4} \quad G = \frac{a^2}{2} \\ v = u \Rightarrow dv = du \\ \bar{v} = \frac{\pi}{2} - \bar{u} \Rightarrow d\bar{v} = -d\bar{u} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{a^2\,du\,d\bar{u} - \frac{a^2}{2}\,du\,d\bar{u}}{\sqrt{a^2\,du^2 + \frac{a^2}{2}\,du^2}\,\sqrt{a^2\,d\bar{u}^2 + \frac{a^2}{2}\,d\bar{u}^2}} = \frac{a^2(1-\frac{1}{2})\,du\,d\bar{u}}{a\,du\sqrt{1+\frac{1}{2}}\;a\,d\bar{u}\sqrt{1+\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

U tački M_1 traženi ugao je $\omega = \arccos\frac{1}{3}$.

U tačkama M_2 i M_3 ne možemo tražiti ugao između dvije krive jer su to singularne tačke krive.

U singularnim tačkama parametarske mreže plohe, ugao između dvije krive na plohi potražit ćemo direktno kao na prvi način (tj. neovisno o plohi). Može se također odabrati i druga parametrizacija za koju te tačke nisu singularne.

Odrediti izraz za površinu zatvorenog područja (K) na plohi $z=z(x,y)$.

Rj. Jednačina plohe ima vektorsku jednačinu

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z(x,y)\vec{k}.$$

Kako je
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (1, 0, z'_x)$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (0, 1, z'_y) \quad ,$$

Ako uvedemo oznaku $p = z'_x$ i $q = z'_y$ Gausove fundamentalne veličine prvog reda su

$$E = 1+p^2, \quad F = pq, \quad G = 1+q^2$$

$$P = \iint_{(K)} dS = \iint_{D} \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv$$

$$EG - F^2 = (1+p^2)(1+q^2) - p^2q^2 = 1+p^2+q^2$$

Prema tome površinu zatvorenog područja (K) možemo izračunati po formuli

$$P = \iint_{D} \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy$$

dvostruki integral

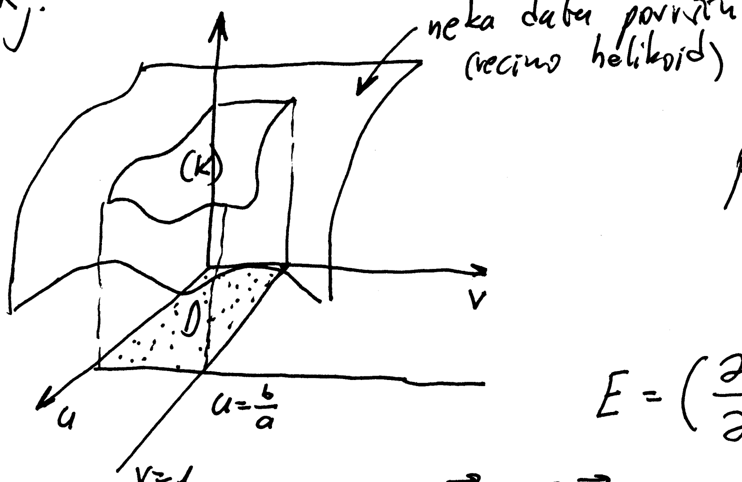
gdje je D područje u ravni xOy za koje je $\vec{r}(D) = (K)$ (istu formulu smo imali u Analizi III kod primjene površinskog integrala I vrste).

Naći površinu četverougla na helikoidu

$$x = au\cos v$$
$$y = au\sin v$$
$$z = bv,\quad u,v\in\mathbb{R}$$

ograničenog krivima $u=0,\ u=\frac{b}{a},\ v=0,\ v=1.$

Rj.



$$P=\iint\limits_{(K)} dS = \iint\limits_{D}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

$$E=\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right)^2 = (a\cos v)^2+(a\sin v)^2+0=a^2$$

$$F=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=(a\cos v,\ a\sin v,\ 0)(-au\sin v,\ au\cos v,\ b)$$
$$=-a^2u\sin v\cos v+a^2u\sin v\cos v+0=0$$

$$G=\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)^2=a^2u^2\sin^2 v+a^2u^2\cos^2 v+b^2=a^2u^2+b^2$$

$$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{a^2(a^2u^2+b^2)-0^2}=a\sqrt{a^2u^2+b^2}$$

$$P=\iint\limits_{D} a\sqrt{a^2u^2+b^2}\,du\,dv=a\int_0^{\frac{b}{a}}\sqrt{a^2u^2+b^2}\,du\int_0^1 dv=a\int_0^{\frac{b}{a}}\sqrt{a^2u^2+b^2}\,du$$

$$=\left|\begin{array}{ll} u=\frac{b}{a}s & \\ u^2=\frac{b^2}{a^2}s^2 & u\Big|_0^{\frac{b}{a}}\Rightarrow s\Big|_0^1 \\ du=\frac{b}{a}ds & \end{array}\right| = a\int_0^1\sqrt{b^2s^2+b^2}\,\frac{b}{a}\,ds=b^2\int_0^1\sqrt{s^2+1}\,ds$$

$$\int_0^1\sqrt{s^2+1}\,ds=\left|\begin{array}{ll} u=\sqrt{s^2+1} & dv=ds \\ du=\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}ds & v=s\end{array}\right| = s\sqrt{s^2+1}-\int\frac{s^2+1-1}{\sqrt{s^2+1}}\,ds$$

$$=-\int\sqrt{s^2+1}\,ds+\int\frac{ds}{\sqrt{s^2+1}}$$

$$\Rightarrow 2\int_0^1\sqrt{s^2+1}\,ds=s\sqrt{s^2+1}+\int\frac{ds}{\sqrt{s^2+1}}=s\sqrt{s^2+1}+\ln\left|s+\sqrt{s^2+1}\right|+C$$

tražena površina

$$\Rightarrow P=\frac{b^2}{2}\left[\sqrt{2}+\ln\left|1+\sqrt{2}\right|\right]$$

U zadacima od 278. do 287. naći prvu kvadratnu formu za sljedeće (rotacione) plohe:

278. $x = a\sin u\cos v,\ y = a\sin u\sin v,\ z = c\cos u;\ u \in [0, \pi],\ v \in [0, 2\pi]$, rotacioni (kružni) elipsoid;

279. $x = R\cos v,\ y = R\sin v,\ z = u;\ u \in \mathbf{R},\ v \in [0, 2\pi]$, kružni valjak;

280. $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = ku;\ u \in \mathbf{R},\ v \in [0, 2\pi]$, kružni stožac;

281. $z^2 = x^2 + y^2$, kružni stožac;

282. $x = au\cos v,\ y = au\sin v,\ z = u;\ u \in \mathbf{R},\ v \in [0, 2\pi]$, rotacioni paraboloid (vidi zad. 334 i 372);

283. $x = a\,\mathrm{ch}\,u\cos v,\ y = a\,\mathrm{ch}\,u\sin v,\ z = c\,\mathrm{sh}\,u;\ u \in \mathbf{R},\ v \in [0, 2\pi]$, jednoplošni rotacioni hiperboloid;

284. $x = a\,\mathrm{sh}\,u\cos v,\ y = a\,\mathrm{sh}\,u\sin v,\ z = c\,\mathrm{ch}\,u;\ u \in \mathbf{R},\ v \in [0, 2\pi]$, dvoplošni rotacioni hiperboloid;

285. $x = (a + b\cos u)\cos v,\ y = (a + b\cos u)\sin v,\ z = b\sin u;\ u, v \in [0, 2\pi]$, torus;

286. $x = a\sin u\cos v,\ y = a\sin u\sin v,\ z = a\left(\ln\mathrm{tg}\frac{u}{2} + \cos u\right);\quad u \in \mathbf{R}_+,$ $v \in [0, 2\pi]$, pseudosfera;

287. $x = a\,\mathrm{ch}\frac{u}{a}\cos v,\ y = a\,\mathrm{ch}\frac{u}{a}\sin v,\ z = u;\ u \in \mathbf{R},\ v \in [0, 2\pi]$, katenoid (vidi zad. 221).

288. Naći prvu diferencijalnu formu helikoida:

$$x = au\cos v,\ y = au\sin v,\ z = bv;\quad u, v \in \mathbf{R}.$$

289. Naći prvu diferencijalnu formu koordinatne XOY ravnine parametrizirane sa:

$$x = u,\ y = v,\ z = 0,\quad u, v \in \mathbf{R}.$$

290. Naći prvu diferencijalnu formu elipsoida (vidi zad. 227):

$$x = a\sin u\cos v,\ y = b\sin u\sin v,\ z = c\cos u,\ u \in [0, \pi],\ v \in [0, 2\pi].$$

291. Odrediti plohu čija je prva diferencijalna forma:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{x^2 + y^2}\left[(2x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x^2 + 2xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + (x^2 + 2y^2)\,\mathrm{d}y^2\right]$$

i na kojoj se nalazi kružnica $x^2 + y^2 = 1,\ z = 1$.

292. Odrediti prvu diferencijalnu formu, izračunati $\mathrm{d}S = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$ za plohu i ispitati kakve su krivulje na plohi u i v linije ako je:

$$\vec{r} = \cos u\, \vec{i} + \sin u (\cos v\, \vec{j} + \sin v\, \vec{k}); \quad u \in [0, \pi], \quad v \in [-\pi, \pi].$$

293. Odrediti prvu diferencijalnu formu, izračunati element ploštine $\mathrm{d}S$ plohe i ispitati kakve su krivulje na plohi u i v linije ako je:

$$\vec{r} = (u + v^2)\, \vec{a} + (v + u^2)\, \vec{b} + uv\, \vec{c}; \; u, v \in \mathbf{R}.$$

($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ konstantni vektori).

294. Ako je porodica krivulja na plohi zadana diferencijalnom jednadžbom:

$$A\, \mathrm{d}u + B\, \mathrm{d}v = 0,$$

tada je jednadžba ortogonalnih trajektorija, tj. krivulja koje sijeku zadane krivulje pod pravim kutem dana s:

$$(BE - AF)\, \mathrm{d}u + (BF - AG)\, \mathrm{d}v = 0.$$

Dokazati.

295. Sastaviti diferencijalnu jednadžbu ortogonalnih trajektorija porodice krivulja

$$\phi(u, v) = \text{const.}$$

na plohi $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$.

296. Naći ortogonalne trajektorije porodice krivulja

$$u + v = \text{const.}$$

koje leže na kugli:

$$\vec{r} = \{R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u\}; \quad u \in [0, \pi], \quad v \in [-\pi, \pi].$$

297. Na kružnom stošcu:

$$x = u \cos v, \; y = u \sin v, \; z = u; \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi],$$

promatrati porodicu krivulja:

$$v = u^2 + \alpha,$$

gdje je α parametar. Naći porodicu njihovih ortogonalnih trajektorija.

298. Dokazati da uvjet ortogonalnosti dviju porodica krivulja na plohi koje su određene diferencijalnom jednadžbom:

$$A(u, v)\, \mathrm{d}u^2 + 2B(u, v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v + C(u, v)\, \mathrm{d}v^2 = 0$$

glasi:

$EC = 2BF + AG = 0.$

299. Dokazati da na helikoidu:

$$x = u \cos v, \; y = u \sin v, \; z = a v, \quad u, v \in \mathbf{R}$$

diferencijalna jednadžba:

$$\mathrm{d}u^2 - (u^2 + a^2)\, \mathrm{d}v^2 = 0$$

određuje ortogonalnu mrežu parametarskih linija.

300. Pokazati da se krivulje:

$$\sin u + a(v+1) = 0 \qquad \text{i} \qquad \frac{a}{\sin^3 u} + v = b$$

(a, b = const.) na plohi:

$$\vec{r} = \left\{ \sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u + \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right\}, \quad u \in \mathbf{R}_+, \quad v \in [0, 2\pi],$$

sijeku ortogonalno.

301. Na plohi:

$$\vec{r} = \{ u, v, uv \}, \quad u, v \in \mathbf{R}$$

dane su dvije krivulje: $c_1 : u^2 + v^2 = 1$ i $c_2 : v = au$.

a) Naći presječne točke danih krivulja.
b) Odrediti kut pod kojim se sijeku te krivulje.
c) Koliko je a da se krivulje sijeku ortogonalno?

302. Odrediti ortogonalne trajektorije koordinatnih krivulja plohe:

$$\vec{r} = \{ u \cos v, u \sin v, u + v \}, \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

303. Odrediti ortogonalne trajektorije koordinatnih krivulja plohe:

$$\vec{r} = \{ v \cos u - a \sin u, v \sin u + a \cos u, au \} \ (a > 0), \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

304. Dana je ploha:

$$x = u^2 + v^2, \ y = u^2 - v^2, \ z = uv, \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

a) Naći prvu kvadratnu formu.
b) Izračunati diferencijal duljine luka za krivulje $u = 2$, $v = 1$, $v = au$.
c) Izračunati duljinu luka krivulje $v = au$ između točaka njenog presjeka s krivuljama $u = 1$, $u = 2$.

305. Naći pod kojim se kutem sijeku krivulje:

$$u + v = 0, \ u - v = 0$$

na helikoidu:

$$x = u \cos v, \ y = u \sin v, \ z = av, \quad u, v \in \mathbf{R}.$$

306. Naći kut pod kojim krivulja:

$$v = A e^{mu}$$

siječe izvodnice kružnog stošca:

$$x = v \cos u \cos \alpha, \ y = v \sin u \cos \alpha, \ z = v \sin \alpha, \ u \in [0, 2\pi], \ v \in \mathbf{R},$$

gdje je α parametar.

307. Na plohi s prvom kvadratnom formom:

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{sh}^2 u \, dv^2$$

naći duljinu luka krivulje $v = u$ među točkama $M_1(u_1, v_1)$ i $M_2(u_2, v_2)$.

308. Naći kut među krivuljama

$$v = 2u, \quad v = -2u$$

na plohi koja ima prvu kvadratnu formu:

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

309. Naći kut između krivulja zadanih jednadžbama:

$$v = u + 1 \quad \text{i} \quad v = 3 - u$$

na plohi:

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = u^2, \quad u \in \mathbf{R}, \quad v \in [0, 2\pi].$$

310. Na helikoidu:

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av, \quad u, v \in \mathbf{R}$$

zadane su krivulje svojim jednadžbama:

$$v = \ln(u \pm \sqrt{u^2 + a^2}) + c.$$

Izračunati duljinu luka tih krivulja između točaka

$$M_1(u_1, v_1) \quad \text{i} \quad M_2(u_2, v_2).$$

311. Na pseudosferi:

$$x = a\sin u\cos v, \quad y = a\sin u\sin v,$$

$$z = a\left(\ln\operatorname{tg}\frac{u}{2} + \cos u\right), \quad u \in \mathbf{R}_+, \quad v \in [0, 2\pi]$$

zadane su dvije porodice krivulje svojim jednadžbama:

$$v = \pm\ln\operatorname{tg}\frac{u}{2} + c.$$

Izračunati duljinu luka svake porodice krivulje između točaka $M_1(u_1, v_1)$ i $M_2(u_2, v_2)$.

312. Naći ploštine četverokuta na helikoidu:

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av, \quad u, v \in \mathbf{R}$$

omeđenog krivuljama: $u = 0,\ u = a,\ v = 0,\ v = 1$.

313. Naći ploštinu krivocrtnog trokuta:

$$u = \pm av, \quad v = 1,$$

smještenog na plohi s prvom kvadratnom formom:

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\,dv^2.$$

314. Naći ploštinu konveksnog kuglinog područja omeđenog petljom krivulje Vivijanija (vidi zad. 55).

315. Naći površinu torusa:

$x = (a + b\cos u)\cos v,\ y = (a + b\cos u)\sin v,\ z = b\sin u, \quad u, v \in [0, 2\pi]$, (vidi zad. 285).

278. $\mathrm{d}s^2 = (a^2\cos^2 u + c^2 \sin^2 u)\,\mathrm{d}u^2 + a^2 \sin^2 u\,\mathrm{d}v^2.$

279. $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + R^2\,\mathrm{d}v^2.$

280. $\mathrm{d}s^2 = (1+k^2)\,\mathrm{d}u^2 + u^2\,\mathrm{d}v^2.$

281. $\mathrm{d}s^2 = \dfrac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x^2 + \dfrac{2xy}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \dfrac{x^2+2y^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y^2.$

282. $\mathrm{d}s^2 = (a^2 + 4u^2)\,\mathrm{d}u^2 + a^2u^2\,\mathrm{d}v^2.$

283. $\mathrm{d}s^2 = (a^2\,\mathrm{sh}^2 u + c^2\,\mathrm{ch}^2 u)\,\mathrm{d}u^2 + a^2\,\mathrm{ch}^2 u\,\mathrm{d}v^2.$

284. $\mathrm{d}s^2 = (a^2\,\mathrm{ch}^2 u + c^2\,\mathrm{sh}^2 u)\,\mathrm{d}u^2 + a^2\,\mathrm{sh}^2 u\,\mathrm{d}v^2.$

285. $\mathrm{d}s^2 = b^2\,\mathrm{d}u^2 + (a + b\cos u)^2\,\mathrm{d}v^2.$

286. $\mathrm{d}s^2 = a^2\,\mathrm{ctg}^2 u\,\mathrm{d}u^2 + a^2\sin^2 u\,\mathrm{d}v^2.$

287. a) $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{ch}^2\dfrac{u}{a}\,\mathrm{d}u^2 + a^2\,\mathrm{ch}^2\dfrac{u}{a}\,\mathrm{d}v^2.$

b) $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + (a^2+u^2)\,\mathrm{d}v^2$ prema zad. 221. a) i b).

288. $\mathrm{d}s^2 = a^2\,\mathrm{d}u^2 + (a^2u^2 + b^2)\,\mathrm{d}v^2.$

289. $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2.$

290. $[(a^2\cos^2 v + b^2\sin^2 v)\cos^2 u + c^2\sin^2 u]\,\mathrm{d}u^2 + \dfrac{b^2-a^2}{2}\sin 2u\cos 2v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v +$

$+ [\sin^2 u\,(a^2\sin^2 v + b^2\cos^2 v)]\,\mathrm{d}v^2$, ili:

$$\mathrm{d}s^2 = \{a^2[\cos^2 v + (1-\varepsilon^2)\sin^2 v]\cos^2 u + c^2\sin^2 u]\}\,\mathrm{d}u^2 -$$

$$-\frac{a^2}{2}\varepsilon^2\sin 2u\cos 2v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + a^2\{\sin^2 u[\sin^2 v + (1-\varepsilon^2)\cos^2 v]\}\,\mathrm{d}v^2,$$

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{a^2}(a^2 - b^2).$$

291. Usporedivši sa zad. 270. naći ćemo p i q, a zatim zbog $\mathrm{d}z = p\,\mathrm{d}x + q\,\mathrm{d}y$ i $z = c^2 \pm \sqrt{x^2+y^2}$. Odatle uz uvjete zadatka: $z^2 = x^2 + y^2$ i $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ (rotacioni stožac).

292. Ploha je sfera, jer je $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; u-krivulje ($v = v_0$) su meridijani, a v-krivulje ($u = u_0$) su paralele. $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + \sin^2 u\,\mathrm{d}v^2$; $\mathrm{d}S = |\sin u|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$.

293. u-krivulje ($v = v_0$) i v-krivulje ($u = u_0$) su parabole, pa je ploha paraboloid; $E = (\vec{a} + 2u\vec{b} + v\vec{c})^2$, $G = (2v\vec{a} + \vec{b} + u\vec{c})^2$, $F = (\vec{a} + 2u\vec{b} + v\vec{c})\,(2v\vec{a} + \vec{b} + u\vec{c})$;

$$\mathrm{d}S = (1 - 4uv)\,(\vec{a} \times \vec{b}) + (2u^2 - v)\,(\vec{b} \times \vec{c}) + (2v^2 - u)\,(\vec{c} \times \vec{a}).$$

294. U izraz za okomitost dviju krivulja (vidi § 8.3. d)):

$E\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\bar{u} + F(\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\bar{v} + \mathrm{d}\bar{u}\,\mathrm{d}v) + G\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}\bar{v} = 0$ uvrstiti podatak da je za prvu krivulju $C_1 : \mathrm{d}u \neq 0$, $\mathrm{d}v \neq 0$, a za drugu $C_2 : \mathrm{d}\bar{v} = -A/B\,\mathrm{d}\bar{u}$.

295. Analogno kao prethodni zadatak: C_1 ima $\mathrm{d}u \neq 0$, $\mathrm{d}v \neq 0$, $C_2 : \phi_u\,\mathrm{d}\bar{u} + \phi_v\,\mathrm{d}\bar{v} = 0$. Odavde uvrstimo $\mathrm{d}\bar{v} = -\phi_u/\phi_v\,\mathrm{d}\bar{u}$ u izraz za okomitost dviju krivulja; $(E\phi_v - F\phi_u)\,\mathrm{d}u + (F\phi_v - G\phi_u)\,\mathrm{d}v = 0$.

296. $v + \operatorname{ctg} u = C$.

297. $v = \dfrac{1}{2u^2} + \beta$, gdje je β parametar.

298. Dvije porodice krivulja na plohi zadovoljavaju diferencijalnu jednadžbu:

$A\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)^2 + 2B\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right) + S = 0$, čija rješenja ćemo označiti s: C_1: $\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)_1 = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$, a C_2; $\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)_2 = \dfrac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\bar{v}}$. Tako imamo da vrijedi: $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\,\dfrac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\bar{v}} = \dfrac{C}{A}$, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} + \dfrac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\bar{v}} = -\dfrac{2B}{A}$, što uvršteno u uvjet ortogonalnosti dviju krivulja na plohi:

$E\,\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\,\dfrac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}v} + F\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} + \dfrac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}\bar{v}}\right) + G = 0$, daje traženi uvjet:

$EC - 2FB + GA = 0$.

299. Prema prethodnom zadatku.

300. U uvjet ortogonalnosti dviju krivulja na plohi uvrstiti da je prema uvjetima zadatka:

$$C_1\colon\ \mathrm{d}v = -\frac{\cos u}{a}\,\mathrm{d}u,\ \text{a}\ C_2\colon\ \mathrm{d}\bar{v} = \frac{a\cos u}{\sin^4 u}\,\mathrm{d}\bar{u}.$$

301. a) $u = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$; $v = \pm\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ (uzeti samo + ili samo −);

b) $\cos\phi = \dfrac{2a(a^2-1)}{\sqrt{2}\,\sqrt{a^4+1}\,\sqrt{a^4+6a^2+1}}$; c) $a \in \{0, 1, -1\}$.

302. Prema § 8.3.a) i b) uvjet da je neka krivulja na plohi ortogonalna na koordinatnu u-krivulju ($\bar{u} \neq 0$, $\bar{v} = c$, $\mathrm{d}\bar{u} \neq 0$, $\mathrm{d}\bar{v} = 0$) jest: $Edu + Fdv = 0$, a uvjet ortogonalnosti na koordinatnu v-krivulju ($v \neq 0$, $u = c$, $\mathrm{d}v \neq 0$, $\mathrm{d}u = 0$) jest: $Fd\bar{u} + Gd\bar{v} = 0$. $Edu + Fdv = 0$ daje $2\,\mathrm{d}u + \mathrm{d}v = 0$, a uvjet $Fd\bar{u} + Gd\bar{v} = 0$ daje:

$\mathrm{d}\bar{u} + (u^2+1)\,\mathrm{d}\bar{v} = 0$; $2u + v = c_1$ i $u = \operatorname{tg}(c_2 - v)$.

303. Kao prethodni zadatak: $E\,\mathrm{d}u + F\,\mathrm{d}v = 0$ daje: $(v^2 + 2a^2)\,\mathrm{d}u - a\,\mathrm{d}v = 0$, a $F\,\mathrm{d}\bar{u} + G\,\mathrm{d}\bar{v} = 0$ daje: $-a\,\mathrm{d}\bar{u} + \mathrm{d}\bar{v} = 0$; $v = a\sqrt{2}\,\operatorname{tg}\sqrt{2}(u - c_1)$, $v = au + c_2$.

304. a) $\mathrm{d}s^2 = (8u^2 + v^2)\,\mathrm{d}u^2 + 2uv\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + (8v^2 + u^2)\,\mathrm{d}v^2)$;

b) $\mathrm{d}s = 2\sqrt{2v^2+1}\,\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}s = (8u^2+1)\,\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}s = 2u\sqrt{2a^4+a^2+2}\,\mathrm{d}u$;

c) $s = 3\sqrt{2a^4+a^2+2}$.

305. $\cos\phi = \dfrac{1-a^2}{1+a^2}$.

306. $E = v^2 \cos^2 \alpha, \quad G = 1, \quad F = 0, \quad C_1\colon\ \mathrm{d}\bar{u} = 0, \quad \mathrm{d}\bar{v} \neq 0,$

$$C_2\colon\ \mathrm{d}v = mv\,\mathrm{d}u, \quad \cos\theta = \frac{m}{\sqrt{m^2 + \cos^2 \alpha}} = \text{const.}$$

307. $s = |\operatorname{sh} u_2 - \operatorname{sh} u_1|.$ **308.** $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}.$ **309.** $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}.$

310. $s = \sqrt{2}\,|u_2 - u_1|.$

311. $s = a \left| \displaystyle\int_{u_1}^{u_2} \frac{\mathrm{d}u}{\sin u} \right| = a \left| \ln \operatorname{tg} \frac{u_2}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{u_1}{2} \right| = a\ |v_2 - v_1|.$

312. $S = \dfrac{a^2}{2}\,[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})].$

313. $S = a^2 \left[\dfrac{2}{3} - \dfrac{\sqrt{2}}{3} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right].$ **314.** $S = 2a^2.$

315. $S = \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}u \int_0^{2\pi} b(a + b\cos u)\,\mathrm{d}v = 4\pi^2 ab.$